Bài 1 : Giải bất phương trình $(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}\geq 2(x+1)$

Lời giải tham khảo :

$$(x-1)\sqrt{x^2-2x+5}-4x\sqrt{x^2+1}\geq 2(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+2x\left(2\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2x+5}\right)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+\frac{2x\left(4x^2+4-x^2+2x-5\right)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+\frac{2x(x+1)(3x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\left(2+\sqrt{x^2-2x+5}\right)+\frac{2x(3x-1)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right]\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\frac{4\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2-2x+5}+2\sqrt{(x^2+1)(x^2-2x+5)}+(7x^2-4x+5)}{2\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+5}}\right]\leq 0$$

Có $7x^2-4x+5=7\left(x^2-\frac{4}{7}x+\frac{4}{49}\right)+\frac{31}{7}\geq\frac{31}{7}$ nên biểu thức trong ngoặc luôn >0.

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow x+1\leq 0\Leftrightarrow x\leq -1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=(-\infty;-1]$

Bài 2 : Giải bất phương trình $\sqrt{x+2}+x^2-x+2\leq\sqrt{3x-2}$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $x\geq\frac{2}{3}$

$$bpt\ \Leftrightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}+x^2-x-2\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2(x-2)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+(x-2)(x+1)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\frac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+x+1\right]\leq 0$$

Xét $f(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}} + x + 1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + \dfrac{3}{\sqrt{3x-2}}}{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}\right)} + 1 > 0$

$\Rightarrow f(x) \geq f\left(\frac{2}{3}\right) > 0$

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left[\dfrac{2}{3}; 2\right]$

Bài 3 : Giải bất phương trình $4\sqrt{x+1} + 2\sqrt{2x+3} \leq (x-1)(x^2-2)$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $x \geq -1$

Nhận thấy x = - 1 là một nghiệm của bất phương trình

Xét x > - 1 ta có bất phương trình tương đương với

$$4\left(\sqrt{x+1}-2\right) + 2\left(\sqrt{2x+3}-3\right) \leq x^3 - x^2 - 2x - 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-3)}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4(x-3)}{\sqrt{2x+3}+3} \leq (x-3)(x^2+2x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \frac{4}{\sqrt{2x+3}+3} - (x+1)^2 - 3\right) \leq 0$$

Vì x > - 1 nên $\sqrt{x+1} > 0$ và $\sqrt{2x+3} > 1 \Rightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \dfrac{4}{\sqrt{2x+3}+3} < 3$

Do đó $\dfrac{4}{\sqrt{x+1}+2} + \dfrac{4}{\sqrt{2x+3}+3} - (x+1)^2 - 3 < 0$

Suy ra bất phương trình $\Leftrightarrow x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \{1\} \cup [3; +\infty)$

Bài 4 : Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x}} \geq 1$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $x \geq 0$. Khi $x \geq 0$ ta có $\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{x} > 0$

$$\frac{\sqrt{x(x+2)}}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(x+2)} \geq \sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{x}$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x \geq x^3+3x^2+4x+1-2(x+1)\sqrt{x(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow x^3+2x^2+2x+1-2(x+1)\sqrt{x^2+x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x^2+x+1-2\sqrt{x^2+x}\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+1-2\sqrt{x^2+x} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x}-1\right)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}=1 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Kết hợp với điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

Bài 5 : Giải bất phương trình $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}-\dfrac{1}{\sqrt{-x-1}}-\dfrac{2}{3}x \geq 1$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $-2<x<-1$ $\quad(*)$

$$bpt \Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}-\frac{1}{\sqrt{-x-1}}\right) \geq \left(\sqrt{x+2}\right)^2-\left(\sqrt{-x-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq \sqrt{x+2}\sqrt{-x-1}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{-x-1}\right)$$

Đặt $a=\sqrt{x+2}-\sqrt{-x-1} \Rightarrow \sqrt{x+2}.\sqrt{-x-1}=\dfrac{1-a^2}{2}$

Ta được bất phương trình $\dfrac{a-a^3}{2} \leq 3 \Leftrightarrow a^3-a+6 \geq 0 \Leftrightarrow (a+2)\left(a^2-2a+3\right) \geq 0 \Leftrightarrow$ $a \geq -2$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2}-\sqrt{-x-1} \geq -2 \Leftrightarrow \sqrt{x+2}+2 \geq \sqrt{-x-1} \Leftrightarrow x+6+4\sqrt{x+2} \geq -x-1$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{x+2} \geq -(2x+7) \qquad (1)$$

(1) luôn đúng với điều kiện (*). Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=(-2;-1)$

Bài 6 : Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3-x}} > x-\dfrac{1}{2}$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $x \in [-1;3]\setminus\{1\}$

$$bpt \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)}{2(x-1)} > x-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x+1+\sqrt{-x^2+2x+3}}{2(x-1)} > x-\frac{1}{2} \quad (*)$$

Trường hợp 1 : $1 < x \leq 3 \quad (1)$

$$(*) \Leftrightarrow x+1+\sqrt{-x^2+2x+3} > 2x^2-3x+1$$

$$\Leftrightarrow 2\left(-x^2+2x+3\right)+\sqrt{-x^2+2x+3}-6 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^2+2x+3} > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{2-\sqrt{7}}{2}; \frac{2+\sqrt{7}}{2}\right)$$

Kết hợp với (1) ta được $x \in \left(1; \frac{2+\sqrt{7}}{2}\right)$

Trường hợp 2 : $-1 < x < 1 \quad (2)$

$$(*) \Leftrightarrow x+1+\sqrt{-x^2+2x+3} < 2x^2-3x+1$$

$$\Leftrightarrow 2\left(-x^2+2x+3\right)+\sqrt{-x^2+2x+3}-6 < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{-x^2+2x+3} < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-1; \frac{2-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{7}}{2}; 3\right]$$

Kết hợp với (2) ta được $x \in \left[-1; \frac{2-\sqrt{7}}{2}\right)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left[-1; \frac{2-\sqrt{7}}{2}\right) \cup \left(1; \frac{2+\sqrt{7}}{2}\right)$

Bài 7 : Giải bất phương trình $\dfrac{6x^2-2(3x+1)\sqrt{x^2-1}+3x-6}{x+1-\sqrt{x-1}-\sqrt{2-x}-\sqrt{2(x^2+2)}} \leq 0$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $1 \leq x \leq 2$

Ta có

$$(x+1)^2 = x^2+2x+1 \leq x^2+x^2+1+1 \leq 2x^2+2 < 2x^2+4$$

$$\Rightarrow x+1 < \sqrt{2(x^2+2)} \Rightarrow x+1-\sqrt{x-1}-\sqrt{2-x}-\sqrt{2(x^2+2)} < 0 \quad \forall x \in [1;2]$$

$bpt \Leftrightarrow 6x^2 - 2(3x+1)\sqrt{x^2-1} + 3x - 6 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4(x^2-1) - 2(3x+1)\sqrt{x^2-1} + 2x^2 + 3x - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2-1} - x + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x^2-1} - \frac{x}{2} - 1\right) \geq 0 \quad (1)$

Xét $1 \leq x \leq 2$ ta có $\sqrt{x^2-1} - \frac{x}{2} - 1 \leq \sqrt{3} - 2 < 0$

Do đó bất phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1} - x + \frac{1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{5}{4}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left[1; \frac{5}{4}\right]$

Bài 8 : Giải bất phương trình $2\sqrt{x^3} + \frac{5-4x}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x + \frac{10}{x} - 2}$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $x > 0$

$bpt \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 5 \geq \sqrt{x^2 - 2x + 10}$

$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 10) - \sqrt{x^2 - 2x + 10} - 15 \geq 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 10} \geq 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 10 \geq 9$

bất phương trình cuối luôn đúng. Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = (0; +\infty)$

Bài 9 : Giải bất phương trình $3\left(2x^2 - x\sqrt{x^2+3}\right) < 2(1 - x^4)$

Lời giải tham khảo :

$bpt \Leftrightarrow 2(x^4 + 3x^2) - 3x\sqrt{x^2(x^2+3)} - 2 < 0$

Đặt $x\sqrt{x^3+3} = t \Rightarrow x^4 + 3x^2 = t^2$

Khi đó $bpt \Rightarrow 2t^2 - 3t - 2 < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < t < 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x\sqrt{x^2+3} < 2$

* Với $x \geq 0$ ta có

$bpt \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x\sqrt{x^2+3} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^4 + 3x^2 - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$

* Với x < 0 ta có

$$bpt \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ -\frac{1}{2} < x\sqrt{x^2+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{2} > -x\sqrt{x^2+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^4 + 3x^2 - \frac{1}{4} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < \dfrac{-3+\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{\frac{-3+\sqrt{10}}{2}} < x < 0$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left(-\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{10}}{2}}; 1\right)$

Bài 10 : Giải bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}} < \dfrac{27\left(12+x-\sqrt{x^2+24x}\right)}{8\left(12+x+\sqrt{x^2+24}\right)}$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : x > 0

$$bpt \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}} < \frac{27\left(24+x-2\sqrt{x^2+24x}+x\right)}{8\left(24+x+2\sqrt{x^2+24}+x\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}} < \frac{27\left(\sqrt{x^2+24x}-\sqrt{x}\right)^2}{8\left(\sqrt{x^2+24}+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{x+24}+\sqrt{x}\right)^3 < 27\left(\sqrt{x+24}-\sqrt{x}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x+24}+\sqrt{x}\right) < 3\left(\sqrt{x+24}-\sqrt{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x} < \sqrt{x+24} \Leftrightarrow x < 1$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = [0; 1)$

Bài 11 : Giải bất phương trình $4(x+1)^2 < (2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $x > -\frac{3}{2}$

$$bpt \Leftrightarrow 4(x+1)^2 < \frac{(2x+10)\left(1-\sqrt{3+2x}\right)^2\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2}{\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x+1)^2 < \frac{(2x+10)\,4(x+1)^2}{\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ 1 < \dfrac{2x+10}{\left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \left(1+\sqrt{3+2x}\right)^2 < 2x+10 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ \sqrt{3+2x} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x < 3 \end{cases}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\infty; 3) \setminus \{-1\}$

Bài 12 : Giải bất phương trình $\sqrt[3]{x+24} + \sqrt{12-x} \leq 6$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $x \leq 12$

Đặt $\sqrt[3]{x+24} = u \Leftrightarrow x + 24 = u^3$

$\sqrt{12-x} = v \geq 0 \Leftrightarrow v^2 = 12 - x$

Ta có hệ $\begin{cases} u^3 + v^2 = 36 \quad (1) \\ u + v \leq 6 \quad (2) \end{cases}$

$(1) \Rightarrow u^3 = 36 - v^2 \Leftrightarrow u = \sqrt[3]{36 - v^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{36-v^2} + v \leq 6 \Leftrightarrow 36 - v^2 \leq (6-v)^3$

$\Leftrightarrow (6-v)(6+v) - (6-v)^3 \leq 0$

$\Leftrightarrow (6-v)(6+v-36+12v-v^2) \leq 0$

$\Leftrightarrow (6-v)(3-v)(v-10) \leq 0$

$\Leftrightarrow (v-6)(v-3)(v-10) \leq 0$

$\Leftrightarrow v \in [0; 3] \cup [6; 10]$

$\Rightarrow x \in [-88; -24] \cup [3; +\infty)$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T = [-88; -24] \cup [3; 13]$

Bài 13 : Giải bất phương trình $x + \sqrt{x-1} \geq 3 + \sqrt{2x^2 - 10x + 16}$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $x \geq 1$

bpt $\Leftrightarrow (x-3) + \sqrt{x-1} \geq \sqrt{2}.\sqrt{(x-3)^2 + (x-1)}$

Xét các vecto $\overrightarrow{a} = \left(x-3; \sqrt{x-1}\right), \overrightarrow{b} = (1; 1)$

Ta có $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = (x-3) + \sqrt{x-1}, |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{2}.\sqrt{(x-3)^2 + (x-1)}$

Khi đó *bpt* $\Leftrightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} \geq |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| \Leftrightarrow |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} \Leftrightarrow$ hai vecto cùng hướng

$\Leftrightarrow \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{1} > 0 \Leftrightarrow x = 5$

Kết hợp điều kiện bất phương trình có nghiệm duy nhất x = 5

Bài 14 : Giải bất phương trình $(3-x)\sqrt{x-1} + \sqrt{5-2x} \geq \sqrt{40-34x+10x^2-x^3}$

Lời giải tham khảo :

Điều kiện : $1 \leq x \leq \dfrac{5}{2}$

Xét hai vecto $\overrightarrow{a} = (3-x; 1)$, $\overrightarrow{b} = \left(\sqrt{x-1}; \sqrt{5-2x}\right)$

$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = (3-x)\sqrt{x-1} + \sqrt{5-2x}, |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| = \sqrt{40-34x+10x^2-x^3}$

Khi đó *bpt* $\Leftrightarrow \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} \geq |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| \Leftrightarrow |\overrightarrow{a}|.\left|\overrightarrow{b}\right| = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} \Leftrightarrow$ hai vecto cùng hướng

$\Leftrightarrow \dfrac{3-x}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5-2x}} \Leftrightarrow x = 2$

Kết hợp với điều kiện ta có bất phương trình có nghiệm duy nhất x = 2

Bài 15 : Giải bất phương trình $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{35}{12}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $|x| > 1$

Nếu x < - 1 thì $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0$ nên bất phương trình vô nghiệm

Do đó *bpt* $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + \dfrac{x^2}{x^2-1} + \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1225}{144} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{x^4}{x^2-1} + 2.\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} - \dfrac{1225}{144} > 0 \end{cases}$

Đặt $t = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > 0$

Khi đó ta có bpt $t^2 + 2t - \dfrac{1225}{144} > 0 \Rightarrow t > \dfrac{25}{12}$

Ta được $\begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} > \dfrac{25}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \dfrac{x^4}{x^2-1} > \dfrac{625}{144} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(1; \dfrac{5}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5}{3}; +\infty\right)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $\left(1;\frac{5}{4}\right)\cup\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$

Bài 16 : Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-8x+15}+\sqrt{x^2+2x-15}\le\sqrt{4x^2-18x+18}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x\in(-\infty;-5]\cup[5;+\infty)\cup\{3\}$

Dễ thấy x = 3 là một nghiệm của bất phương trình

Với $x\ge 5$ ta được

$bpt \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)(x-3)}+\sqrt{(x+5)(x-3)}\le\sqrt{(x-3)(4x-6)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+5}\right)\le\sqrt{x-3}.\sqrt{4x-6}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-5}+\sqrt{x+5}\le\sqrt{4x-6}$

$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x^2-25}\le 4x-6$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-25}\le x-6$

$\Leftrightarrow x^2-25\le x^2-6x+9$

$\Leftrightarrow x\le\frac{17}{3}$

Kết hợp ta có $5\le x\le\frac{17}{3}$

Với $x\le -5$ ta được

$\sqrt{(5-x)(3-x)}+\sqrt{(-x-5)(3-x)}\le\sqrt{(3-x)(6-4x)}$

$\Leftrightarrow \sqrt{5-x}+\sqrt{-x-5}\le\sqrt{6-4x}$

$\Leftrightarrow 5-x-x-5+2\sqrt{x^2-25}\le 6-4x$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-25}\le 3-x$

$\Leftrightarrow x^2-25\le 9-6x+x^2$

$\Leftrightarrow x\le\frac{17}{3}$

Kết hợp ta có $x\le -5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=(-\infty;-5]\cup\left[5;\frac{17}{3}\right]\cup\{3\}$

Bài 17 : Giải bất phương trình $\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>\dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $-2\le x\le 2$

$$bpt \Leftrightarrow \sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>2.\frac{(2x+4)-4(2-x)}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}>2.\frac{\left(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\right)}{\sqrt{9x^2+16}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}\right)\left(1-\frac{2\left(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\right)}{\sqrt{9x^2+16}}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+4}-2\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\right)\left(1-\frac{2\left(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\right)}{\sqrt{9x^2+16}}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow (6x-4)\left(\sqrt{9x^2+16}-2\left(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\right)\right)>0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\left(\sqrt{9x^2+16}-2\left(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\right)\right)\left(\sqrt{9x^2+16}+2\left(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\right)\right)>0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\left(9x^2+16-4\left(\sqrt{2x+4}+2\sqrt{2-x}\right)^2\right)>0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\left(9x^2+8x-32-16\sqrt{8-2x^2}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\left(8x-16\sqrt{8-2x^2}+x^2-4\left(8-2x^2\right)\right)>0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\left(8\left(x-2\sqrt{8-2x^2}\right)+\left(x-2\sqrt{8-2x^2}\right)\left(x+2\sqrt{8-2x^2}\right)\right)>0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\left(x-2\sqrt{8-2x^2}\right)\left(8+x+2\sqrt{8-2x^2}\right)>0$$

$$\Leftrightarrow (3x-2)\left(x-2\sqrt{8-2x^2}\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le x<\frac{2}{3}\\ \frac{4\sqrt{3}}{3}<x\le 2\end{array}\right.$$

Bài 18 : Giải bất phương trình $\sqrt[3]{2x+1}+\sqrt[3]{6x+1}>\sqrt[3]{2x-1}$

Lời giải tham khảo

$$bpt \Leftrightarrow \sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}<\sqrt[3]{6x+1}$$

$$\Leftrightarrow -2-3\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)<6x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)+2x+1>0$$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}\left[\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}\right]>0$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{2x+1}>0$

$\Leftrightarrow x>-\frac{1}{2}$

(do biểu thức trong ngoặc luôn dương)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

Bài 19 : Giải bất phương trình $(4x^2-x-7)\sqrt{x+2}>10+4x-8x^2$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x\geq -2$

$bpt \Leftrightarrow (4x^2-x-7)\sqrt{x+2}+2(4x^2-x-7)>2[(x+2)-4]$

$\Leftrightarrow (4x^2-x-7)\left(\sqrt{x+2}+2\right)>2\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2-x-7>2\sqrt{x+2}-4$

$\Leftrightarrow 4x^2>x+2+2\sqrt{x+2}+1$

$\Leftrightarrow 4x^2>\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{ll}\sqrt{x+2}>2x-1 & (1)\\ \sqrt{x+2}<-2x-1 & (2)\end{array}\right. \quad (I)\\ \left\{\begin{array}{ll}\sqrt{x+2}<2x-1 & (3)\\ \sqrt{x+2}>-2x-1 & (4)\end{array}\right. \quad (II)\end{array}\right.$$

Xét (I) từ (1) và (2) suy ra $\left\{\begin{array}{l}x\geq -2\\ 2x-1<-2x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow -2\leq x<0$

Khi đó hệ (I) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-2\leq x<0\\ \sqrt{x+2}<-2x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-2\leq x\leq 1/2\\ x+2<(-2x-1)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-2;-1)$

Xét (II) từ (3) và (4) $\left\{\begin{array}{l}x\geq -2\\ -2x-1<2x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow x>0$

Khi đó hệ (II) $\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x>0\\ \sqrt{x+2}<2x-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x>1/2\\ x+2<(2x-1)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(\frac{5+\sqrt{41}}{8};+\infty\right)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=[-2;-1)\cup\left(\frac{5+\sqrt{41}}{8};+\infty\right)$

Bài 20 : Giải bất phương trình $4\sqrt{x+1} + \dfrac{4x+4}{\sqrt{2x+3}+1} - (x+1)(x^2-2x) \le 0$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x \ge -1$

$$bpt \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=0 \\ 4+\dfrac{4\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+3}+1} \le (x^2-2x)\sqrt{x+1} \quad (*) \end{array}\right.$$

Xét (*)

Nếu $0 \le x \le 2$ suy ra VT > 0 và VP $< 0 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Nếu $-1 \le x < 0$ suy ra VT > 4 và VP $< 3 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm

Nếu $x > 2$ ta có $bpt \Leftrightarrow \dfrac{4}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{4}{\sqrt{2x+3}+1} \le x^2 - 2x$

$f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{4}{\sqrt{2x+3}+1}$ nghịch biến trên $(2; +\infty)$

$g(x) = x^2 - 2x$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

Với x < 3 ta có $f(x) > f(3) = 6 = g(3) > g(x)$ bất phương trình vô nghiệm

Với $x \ge 3$ ta có $f(x) \le f(3) = 6 = g(3) \le g(x)$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T = [3; +\infty) \cup \{-1\}$

Bài 21 : Giải bất phương trình $3\sqrt{2x-1} - 4\sqrt{x-1} \ge \sqrt[4]{\dfrac{2x^2-3x+1}{36}}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x \ge 1$

Ta thấy x $= 1$ là nghiệm của bất phương trình.

Xét $x \ne 1$ chia hai vế của bất phương trình cho $\sqrt[4]{2x^2-3x+1}$ ta được

$$3.\sqrt[4]{\frac{2x-1}{x-1}} - 4.\sqrt[4]{\frac{x-1}{2x-1}} \ge \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Đặt $t = \sqrt[4]{\dfrac{2x-1}{x-1}} \Rightarrow \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{2x-1}} = \dfrac{1}{t}a$ (điệu kiện t > 0)

Khi đó ta được bpt $3t-\frac{4}{t}\geq\frac{1}{\sqrt{6}}\Leftrightarrow 3\sqrt{6}t^2-t-4\sqrt{6}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t\leq\frac{-16}{6\sqrt{6}}\,(l)\\ t\geq\sqrt{\frac{3}{2}}\,(n)\end{array}\right.$

Với $t\geq\sqrt{\frac{3}{2}}$ ta có $\sqrt[4]{\frac{2x-1}{x-1}}\geq\sqrt{\frac{3}{2}}\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x-1}\geq\frac{9}{4}\Leftrightarrow\frac{-x+5}{4(x-1)}\geq 0\Leftrightarrow 1<x\leq 5$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=[1;5]$

Bài 22 : Giải bất phương trình $x+1+\sqrt{x^2-4x+1}\geq 3\sqrt{x}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $\left[\begin{array}{l} 0\leq x\leq 2-\sqrt{3}\\ x\geq 2+\sqrt{3}\end{array}\right.$

Với x = 0 bất phương trình luôn đúng

Với x > 0 chia hai vế bất phương trình cho $\sqrt{x}$ ta được

$bpt\Leftrightarrow\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x+\frac{1}{x}-4}\geq 3\quad(1)$

Đặt $t=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq 2\Rightarrow t^2=x+\frac{1}{x}+2$

Ta được bất phương trình $\sqrt{t^2-6}\geq 3-t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 3-t<0\\ \left\{\begin{array}{l} 3-t\geq 0\\ t^2-6\geq(3-t)^2\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow t\geq\frac{5}{2}$

Do đó $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\geq\frac{5}{2}\Leftrightarrow\sqrt{x}\geq 2\quad\vee\quad\sqrt{x}\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{4}\right]\cup[4;+\infty)$

Đó chính là tập nghiệm của bất phương trình

Bài 23 : Giải bất phương trình $8\sqrt{\frac{2x-3}{x+1}}+3\geq 6\sqrt{2x-3}+\frac{4}{\sqrt{x+1}}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x\geq\frac{3}{2}$

$8\sqrt{\dfrac{2x-3}{x+1}}+3\geq 6\sqrt{2x-3}+\dfrac{4}{\sqrt{x+1}}$

$\Leftrightarrow 8\sqrt{2x-3}+3\sqrt{x+1}\geq 6\sqrt{(2x-3)(x+1)}+4$

$\Leftrightarrow 64(2x-3)+9(x+1)+48\sqrt{(2x-3)(x+1)}\geq 36(2x-3)(x+1)+$

$16+48\sqrt{(2x-3)(x+1)}$

$\Leftrightarrow 72x^2-173x-91\leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{9}\leq x\leq \dfrac{13}{8}$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{13}{8}\right]$

Bài 24 : Giải bất phương trình $\dfrac{5}{2}\sqrt{x^3+x+2}\leq x^2+3$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x\geq -1$

Nhận thấy x = - 1 là một nghiệm của bất phương trình

$bpt\Leftrightarrow \dfrac{5}{2}\sqrt{(x+1)(x^2-x+2)}\leq (x^2-x+2)+(x+1)$

Đặt $\begin{cases} a=\sqrt{x^2-x+2}\geq 0\\ b=\sqrt{x+1}\geq 0\end{cases}$

Có $a^2-b^2=x^2-x+2-x-1=x^2-2x+1=(x-1)^2\geq 0\Leftrightarrow (a-b)(a+b)\geq 0\Leftrightarrow a\geq b$

Khi đó bất phương trình trở thành

$\dfrac{5}{2}ab\leq a^2+b^2\Leftrightarrow 2a^2-5ab+b^2\geq 0\Leftrightarrow (a-2b)(2a-b)\geq 0\Leftrightarrow a-2b\geq 0\Leftrightarrow a\geq 2b$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-x+2}\geq 2\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x^2-x+2\geq 4x+4$

$\Leftrightarrow x^2-5x-2\geq 0$

$\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\dfrac{5-\sqrt{33}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{5+\sqrt{33}}{2};+\infty\right)$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left[\dfrac{5+\sqrt{33}}{2};+\infty\right)\cup$ $\{-1\}$

Bài 25 : Giải bất phương trình $3\sqrt{x^3-1} \le 2x^2+3x+1$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x \ge 1$

Nhận thấy x = 1 là một nghiệm của bất phương trình

$$bpt \Leftrightarrow \frac{2x\left(x^3+x\right)}{\sqrt{x+1}} + 2\left(x+2\right)\sqrt{x+1} > x^3+x+2x\left(x+2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+x\right)\left(\frac{2x}{\sqrt{x+1}}-1\right) - \left(x+2\right)\sqrt{x+1}\left(\frac{2x}{\sqrt{x+1}}-1\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+x-\left(x+2\right)\sqrt{x+1}\right)\left(2x-\sqrt{x+1}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3+x-\left(x+2\right)\sqrt{x+1} > 0 \\ 2x-\sqrt{x+1} > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^3+x-\left(x+2\right)\sqrt{x+1} < 0 \\ 2x-\sqrt{x+1} < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Xét hàm số $f\left(t\right) = t^3+t \Rightarrow f'\left(t\right) = 3t^2+1 > 0 \quad \forall t$

Nên hàm f(t) đồng biến trên R.

Trường hợp 1 : $\begin{cases} f\left(x\right) > f\left(\sqrt{x+1}\right) \\ 2x-\sqrt{x+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \sqrt{x+1} \\ 2x > \sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Trường hợp 2 : $\begin{cases} f\left(x\right) < f\left(\sqrt{x+1}\right) \\ 2x-\sqrt{x+1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt{x+1} \\ 2x < \sqrt{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1+\sqrt{17}}{8}$

Kết hợp ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left(-1; \frac{1+\sqrt{17}}{8}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$

Bài 26 : Giải bất phương trình $\sqrt{x^2-2x+3} - \sqrt{x^2-6x+11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $1 \le x \le 3$

$$bpt \Leftrightarrow \sqrt{x^2-2x+3} + \sqrt{x-2} > \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-6x+11}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(x-1\right)^2+2} + \sqrt{x-1} > \sqrt{\left(3-x\right)^2+2} + \sqrt{3-x}$$

Xét hàm số $f\left(t\right) = \sqrt{t^2+2} + \sqrt{t}$

Ta có $f'\left(t\right) = \frac{t}{\sqrt{t^2+2}} + \frac{1}{2\sqrt{t}} > 0 \quad \forall t \in [1;3]$

Nên f(t) đồng biến nên $f(x-1) > f(3-x) \Leftrightarrow x-1 > 3-x \Leftrightarrow x > 2$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T = (2;3]$

Bài 27 : Giải bất phương trình $\dfrac{x^3-3x^2+2x}{\sqrt{x^4-x^2}} \le \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{|x|\sqrt{x^2-1}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nếu x < - 1 ta có

$$bpt \Leftrightarrow \frac{(1-x)(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x \in (-\infty;-1) \Rightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \\ x-2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(1-x)(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} < 0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Neu\ \ x \in (1;2] \Rightarrow bpt \Leftrightarrow \frac{(1-x)(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} \le \tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{(1-x)(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} \le 0 < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$Neu\ \ x \in (2;+\infty) \Rightarrow bpt \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x^2-1}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)(x-2)^2 \le x+1$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-10x^2+15x-9 \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x^2-4x+3) \le 0$$

$$\Leftrightarrow x \le 3$$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T = (-\infty;-1] \cup (1;3]$

Bài 28 : Giải bất phương trình $2x + \dfrac{6}{x} - 1 \ge \sqrt{4x^2+9} + \sqrt{2x-3}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x \ge \frac{3}{2}$

$$\frac{2x^2-x+6}{x} \geq \sqrt{4x^2+9}+\sqrt{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x^2+9-(2x-3)}{2x} \geq \sqrt{4x^2+9}+\sqrt{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{4x^2+9}+\sqrt{2x-3}\right)\left(\sqrt{4x^2+9}-\sqrt{2x-3}\right)}{2x} \geq \sqrt{4x^2+9}+\sqrt{2x-3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{4x^2+9}-\sqrt{2x-3}}{2x} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+9}-\sqrt{2x-3} \geq 2x$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x^2+9}-2x-1\right)+\left(-\sqrt{2x-3}+1\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-8}{\sqrt{4x^2+9}+2x+1}+\frac{-2x+4}{\sqrt{2x-3}+1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (-2x+4)\left(\frac{2}{\sqrt{4x^2+9}+2x+1}+\frac{1}{\sqrt{2x-3}+1}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2x+4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left[\frac{3}{2};2\right]$

Bài 29 : Giải bất phương trình $x^3+(3x^2-4x-4)\sqrt{x+1} \leq 0$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x \geq -1$

Đặt $y=\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y^2=x+1 \end{cases} \Rightarrow bpt \Rightarrow x^3-(3x^2-4y^2)\,y \leq 0$

Nếu y = 0 thì x = - 1 bất phương trình luôn đúng

Nếu y > 0 thì x > - 1 ta có bất phương trình trở thành (chia cho y^3)

$$bpt \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3+3\left(\frac{x}{y}\right)^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}-1\right)\left(\frac{x}{y}+2\right)^2 \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x/y \leq 1 \\ x/y=-2 \end{array}\right.$$

Trường hợp 1 : $\frac{x}{y}=2 \Rightarrow x=-2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x=2-2\sqrt{2}$

Trường hợp 2: $\frac{x}{y} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq \sqrt{x+1} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Kết hợp với điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left[-1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$

Bài 30 : Giải bất phương trình $2\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 \le \dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x > -4$

$$bpt \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} - 1\right) + x^2 - 3 \le \frac{2-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow 2.\frac{\dfrac{x^2+x+1}{x+4} - 1}{\sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x+4}} + 1} + x^2 - 3 \le \frac{4-(x^2+1)}{\left(2+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^2-3)}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)} + x + 4} + x^2 - 3 + d\frac{x^2-3}{\left(2+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}} \le 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-3)\left[\frac{2}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)} + x + 4} + 1 + \frac{1}{\left(2+\sqrt{x^2+1}\right)\sqrt{x^2+1}}\right] \le 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3 \le 0$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$$

Kết hợp điều kiện ta có tập nghiệm của bất phương trình là $T = \left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$

Tài liệu này dành tặng bạn Thúy Thanh. Người đã cùng tôi đi qua 4 năm đại học. Chúc bạn và gia đình sức khỏe và thành công